Università degli Studi di Padova

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Triennale in Ingeneria dell'Informazione

tesi di laurea

Determinazione dei vincitori in alberi di voto incerti: incertezza sui votanti o sui candidati

Relatore: Dott.ssa Maria Silvia Pini

Laureanda: Sara Meneghetti

Anno Accademico 2012-2013

Indice

1 Introduzione **1**
1.1 Struttura dell'elaborato 2

2 Nozioni e teoremi di base **5**
2.1 Preferenze, profili e grafi di maggioranza 5
2.2 Alberi di voto 7
2.3 Nozioni di vincitori 8
2.4 Relazioni note tra i vincitori 10

3 Incertezza sui votanti **15**
3.1 Studio dei vincitori in alberi di voto semplici 16
3.1.1 Grafo di maggioranza completo 16
3.1.2 Grafo di maggioranza pienamente incompleto 17
3.1.3 Grafo di maggioranza parzialmente incompleto 19
3.1.4 Risultati 21
3.2 Studio dei vincitori in alberi di voto 21
3.2.1 Grafo di maggioranza completo 21
3.2.2 Grafo di maggioranza pienamente incompleto 22
3.2.3 Grafo di maggioranza parzialmente incompleto 23
3.2.4 Risultati 24

4 Incertezza sui candidati **25**
4.1 Studio dei vincitori in alberi di voto semplici 26
4.2 Studio dei vincitori in alberi di voto 28

5 Stato dell'arte **31**

6 Conclusione e sviluppi futuri **33**

Bibliografia **35**

Elenco delle tabelle **36**

Elenco delle figure **38**

Capitolo 1

Introduzione

In sistemi multiagenti gli agenti hanno generalmente preferenze diverse su un insieme di possibili decisioni e può essere necessario aggregare queste preferenze per poter prendere una decisione collettiva. Esistono numerosi casi pratici in cui questo scenario può presentarsi. Gli agenti, per esempio, potrebbero dover decidere come distribuire un insieme di risorse tra di loro, determinare un potenziale presidente oppure stilare una classifica dato un insieme di libri o dischi.

Un meccanismo per giungere ad una scelta collettiva dato un insieme di preferenze sono le votazioni. In una votazione le possibili scelte sono rappresentate come candidati, mentre la decisione collettiva è vista come il vincitore tra i suddetti candidati ed è computata attraverso una regola di voto. La regola di voto maggiormente usata, e che sarà adoperata anche in questo elaborato, si basa su confronti tra coppie di candidati, dove ogni confronto è vinto dal candidato maggiormente preferito dagli agenti. Il vincitore dipende quindi dalla sequenza scelta di confronti, che può essere rappresentata da un albero binario dove le foglie sono etichettate come i candidati nell'elezione, i nodi interni rappresentano il vincitore dello scontro tra i due nodi figli e la radice indica il vincitore totale.

Sfortunatamente ricavare da molti agenti delle preferenze tali da riuscire ad eseguire un'elezione è difficile e dispendioso in termini di tempo e di denaro. Per di più, gli agenti potrebbero non rivelare completamente le loro preferenze, ad esempio per motivi di privacy, dando così vita a situazioni di incertezza nei voti oppure potrebbe esserci qualche forma di incertezza riguardo alla regola di votazione stessa, rendendo così il compito di eleggere un vincitore ancora più arduo.

Ciò che si vuole è riuscire a prendere una decisione nonostante la presenza di incertezza e per questo motivo in tali situazioni si considerano molteplici nozioni di vincitori.

Per migliorare questo processo in termini di tempo, inoltre, si introducono i grafi di maggioranza che riassumono i voti in forma di grafi diretti, dove esiste un arco tra due candidati se e solo se una maggioranza di agenti preferisce il primo candidato al secondo. Il vantaggio che deriva dall'introduzione del grafo di maggioranza è dovuto al fatto che la computazione dei vincitori attraverso questo richiede un tempo polinomiale anche nel caso in cui il grafo sia incompleto (per la mancanza di alcuni archi) e ci siano un numero esponenziale di possibili completamenti dello stesso [1]. Purtroppo però, in caso di incertezza, l'uguaglianza dei vincitori ricavati dalla votazione e dal relativo grafo di maggioranza non è garantita, come già evidenziato in [2], dove si affronta uno studio delle relazioni che intercorrono tra diverse nozioni di vincitori computati a partire da preferenze incomplete e a partire dai grafi di maggioranza ad esse associati.

In questa tesi si affronta uno studio sulle relazioni di uguaglianza dei vincitori determinati a partire dalle preferenze o dai grafi di maggioranza, analogo a quello fatto in [2], in due situazioni precise di incertezza.

La prima situazione di incertezza riguarda l'inserimento di nuovi votanti a votazione già conclusa. Questi agenti pertanto risulteranno non aver espresso nessuna preferenza rispetto l'insieme di candidati su cui la votazione si svolge e potrebbero apportare la modifica del grafo di maggioranza esistente prima del loro inserimento nella votazione.

La seconda situazione di incertezza che si affronta è quella in cui, a votazione conclusa, si aggiungono un certo numero di candidati. I candidati aggiunti in un secondo momento non risultano essere presenti in nessuna preferenza espressa dagli agenti e pertanto verranno aggiunti nel grafo di maggioranza che si aveva prima del loro inserimento nella forma di nodi senza archi a loro incidenti.

Un esempio in cui potrebbe presentarsi una delle due situazioni incertezza introdotte è nel caso di votazione controllata da chi organizza l'elezione che potrebbe voler aggiungere dei nuovi votanti o dei nuovi candidati in modo da poter manipolare il vincitore totale e far vincere il candidato da lui preferito. Questo è un comportamento che ovviamente si vuole evitare [3].

Lo scopo di questo elaborato è di analizzare quando, in un'elezione in cui sia presente una delle due situazioni di incertezza sopra descritte, i vincitori computati a partire dal grafo di maggioranza sono gli stessi che si ricavano dalle preferenze, cioè quando è possibile basarsi sul solo grafo di maggioranza per computare i vincitori.

1.1 Struttura dell'elaborato

L'elaborato è strutturato come segue.

Nel capitolo 2 sono riportate alcune nozioni e teoremi di base, tra cui le definizioni di preferenze, profili e grafi di maggioranza, la definizione degli alberi di voto in semplici e generali, le diverse nozioni di vincitori e le relazioni note tra i vari tipi di vincitori.

Nel capitolo 3 si introduce l'incertezza sui votanti, ovvero situazioni in cui a votazione ultimata si introducono nuovi agenti. A tale scopo si definisce una nuova nozione di profili, i profili V-incompleti, e si analizzano le relazioni tra i diversi tipi di vincitori computati da profili V-incompleti e da grafi di maggioranza da questi indotti, prima per alberi di voto semplici e successivamente per alberi di voto generali.

Nel capitolo 4 si definisce l'incertezza sui candidati: a votazione conclusa si ha l'aggiunta di nuovi candidati. Come per l'incertezza sui votanti, si introduce una nuova nozione di profilo incompleto, il profilo C-incompleto, e si studiano le relazioni tra vincitori determinati a partire dai profili C-incompleti e dai relativi grafi di maggioranza per alberi di voto semplici prima e alberi di voto generali poi.

Nel capitolo 5 è riportata una breve sezione sullo stato dell'arte dove si descrivono alcuni degli studi precedentemente condotti su tale argomento e su cui ci si è basati per redigere questo elaborato.

Nel capitolo 6 sono riportate le conclusioni e i possibili sviluppi futuri.

Capitolo 2

Nozioni e teoremi di base

2.1 Preferenze, profili e grafi di maggioranza

Si definiscono ora le nozioni basilari relative allo studio della determinazione dei vincitori in alberi di voto [2, 1].

Definizione 1 (Preferenza)**.** *La preferenza di un agente è definita come un ordinamento totale stretto, cioè un ordinamento asimmetrico, transitivo e completo, su un insieme di m candidati. I candidati sono presi da un insieme Ω e rappresentano le possibili opzioni su cui gli agenti possono votare.*

Definizione 2 (Profilo)**.** *Un profilo P su Ω è una collezione di n ordinamenti totali stretti su Ω, ad esempio $P = (P_1, ..., P_n)$, dove P_i è la relazione di preferenza dell'agente i.*

D'ora in avanti, per semplicità, assumiamo che il numero degli agenti sia dispari. Questa condizione non risulta essere restrittiva in quanto i risultati possono essere estesi anche a profili con numero di agenti pari specificando però come si trattano i casi di pareggio. Vediamo ora un esempio di profilo.

Esempio 1. Sia dato l'insieme di candidati $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Un profilo P su tale insieme di candidati può essere denotato dalle seguenti preferenze di tre agenti

- $B > C > D > A$
- $A > B > C > D$
- $B > C > D > A$.

Le tre preferenze riportate indicano che il primo votante preferisce il candidato B al candidato C, il candidato C al candidato D e il candidato D al candidato A e in modo anaologo sono definite le preferenze del secondo e terzo agente. □

Preferenze e profili possono essere incompleti, ciò accade quando si ha a che fare con ordinamenti incompleti su un insieme di candidati.

Definizione 3 (Preferenza incompleta). *Una relazione di preferenza incompleta* $>$ *su* Ω *è un ordinamento stretto su* Ω*, cioè una relazione transitiva e irriflessiva su* Ω*.*

Definizione 4 (Profilo incompleto). *Un profilo incompleto su* Ω *è una collezione* $P = (P_1, ..., P_n)$ *di relazioni di preferenza incomplete su* Ω*.*

Si possono definire inoltre profili completi e pienamente incompleti.

Definizione 5 (Profilo completo). *Un profilo è detto completo se ogni agente esprime una preferenza su ogni candidato di* Ω*.*

Definizione 6 (Profilo pienamente incompleto). *Un profilo è detto pienamente incompleto se i candidati non esprimono nessuna preferenza sui candidati di* Ω*.*

Dato un profilo incompleto è possibile definire un suo completamento.

Definizione 7 (Completamento di un profilo). *Sia* $P = (P_1, ..., P_n)$ *un profilo incompleto definito su un insieme di candidati* Ω*, un completamento* R *di* P *è una tupla* $(R_1, .., R_n)$ *tale che ogni* R_i *è un ordinamento totale stretto su* Ω *contenente* P_i*.*

Un utile strumento per rappresentare un profilo è il corrispondente grafo di maggioranza, che non è altro che un grafo diretto dove esiste un arco orientato da un candidato A a un candidato B se esiste una maggioranza di agenti che preferiscono il candidato A al candidato B.

Definizione 8 (Grafo di maggioranza). *Dato un profilo (incompleto)* P*, il grafo di maggioranza* $M(P)$ *indotto da* P *è il grafo diretto il cui insieme dei vertici è* Ω *e dove un arco orientato da* A *a* B *(denotato* $A >_m B$*) indica che una stretta maggioranza di votanti preferiscono* A *a* B*.*

Esempio 2. Il grafo di maggioranza indotto dal profilo dell'Esempio 1, è riportato nella Figura 2.1. □

Il grafo di maggioranza $M(P)$ indotto da un generico profilo P è asimmetrico, ma non necessariamente transitivo.

Analogamente a quanto fatto per i profili, è possibile definire grafi di maggioranza completi e pienamente incompleti.

Definizione 9 (Grafo di maggioranza completo). *Un grafo di maggioranza è detto completo se, per ogni coppia di vertici, esiste un arco diretto che li collega.*

Definizione 10 (Grafo di maggioranza pienamente incompleto). *Un grafo di maggioranza è detto pienamente incompleto se non contiene archi.*

Inoltre, se $M(P)$ è incompleto, l'insieme di tutti i grafi di maggioranza completi che estendono $M(P)$ corrisponde a un sovrainsieme (possibilmente proprio) dell'insieme dei grafi di maggioranza indotti da tutti i possibili completamenti di P.

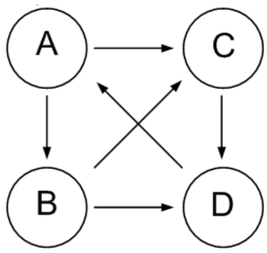

Figura 2.1: Grafo di maggioranza del profilo P.

2.2 Alberi di voto

Definiamo ora formalmente gli alberi di voto che sono le regole d voto che considereremo in questa tesi.

Definizione 11 (Albero di voto). *Dato un insieme di candidati, la regola degli alberi di voto è definita da un albero binario con un candidato per foglia, dove ogni candidato può apparire più di una volta nelle foglie. Ogni nodo interno rappresenta il candidato che vince tra i figli del nodo stesso. Il vincitore tra una coppia di nodi è computato dalla regola di maggioranza, dove A batte B se e solo se c'è una maggioranza di voti che affermano $A > B$. Il candidato nella radice dell'albero è il vincitore assoluto.*

Definizione 12 (Albero di voto semplice). *Un albero di voto è detto semplice se ogni candidato appare esattamente una volta nelle foglie.*

Si nota che, dal momento che il numero dei votanti è dispari, non sono possibili casi di pareggio tra due candidati e quindi il vincitore tra due nodi è sempre facilmente determinabile.

Riporto ora un esempio di albero di voto semplice e di albero di voto generico.

Esempio 3. Sia dato l'insieme di candidati $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Si considera l'albero di voto semplice T_1 della Figura 2.2 in cui il candidato A gareggia con B, il vincitore gareggia con il candidato D e il vincitore di quest'ultimo scontro gareggia con C determinando il vincitore assoluto. Considerando il profilo P dll'Esempio 1, si può dedurre che il vincitore risulta essere il candidato C. □

Esempio 4. Sia dato l'insieme di candidati $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Si considera l'albero di voto generico T_2 della Figura 2.3 in cui la cui radice ha come figlio sinistro l'albero T_1 considerato nell'Esempio 3 e come figlio destro il candidato A, ciò significa che il vincitore totale di T_2 sarà il vincitore della sfida tra il vincitore totale di T_1 e il candidato A. Ragionando come prima sul profilo P dell'Esempio 1, in questo caso il vincitore totale di T_2 risulta essere il candidato A. □

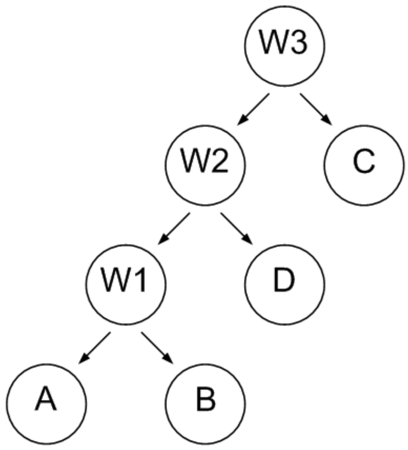

Figura 2.2: Albero di voto semplice T_1.

2.3 Nozioni di vincitori

Numerosi tipi di vincitori sono stati definiti per profili incompleti [2].

Definizione 13. *Sia P un profilo incompleto e A un candidato.*

- *A è un vincitore possibile di Schwartz per P e si denota $A \in PossS(P)$, se e solo se esistono un completamento di P e un albero di voto per cui A vince.*
- *A è un vincitore necessario di Schwartz per P e si denota $A \in NecS(P)$, se e solo se per ogni completamento di P esiste un albero di voto per cui A vince.*
- *A è un vincitore possibile di Condorcet per P e si denota $A \in PossC(P)$, se e solo se esiste un completamento di P tale che A è un vincitore per ogni albero di voto.*
- *A è un vincitore necessario di Condorcet per P e si denota $A \in NecC(P)$, se e solo se per ogni completamento di P e ogni albero di voto, A è un vincitore.*

Definizione 14. *Sia P un profilo incompleto, A un candidato e T un albero di voto.*

- *A è un vincitore possibile per P e T e si indica $A \in Poss(P,T)$, se e solo se esiste un completamento di P per cui A vince in T.*
- *A è un vincitore necessario per P e T e si indica $A \in Nec(P,T)$, se e solo se, per ogni completamento di P, A vince in T.*

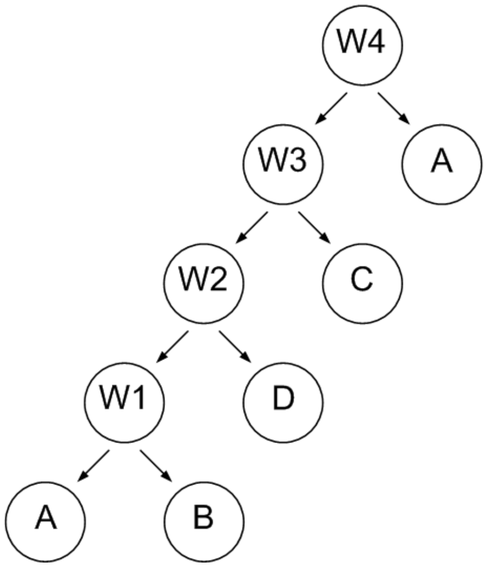

Figura 2.3: Albero di voto T_2.

Le definizioni di vincitori sopra definite possono essere date anche a partire dai grafi di maggioranza, dove l'unica differenza è che tali definizioni considerano completamenti di grafi di maggioranza incompleti e non di profili incompleti.

Definizione 15. *Sia $M(P)$ un grafo di maggioranza incompleto e A un candidato.*

- *A è un vincitore possibile di Schwartz per $M(P)$ e si denota $A \in PossS(M(P))$, se e solo se esistono un completamento di $M(P)$ e un albero di voto per cui A vince.*
- *A è un vincitore necessario di Schwartz per $M(P)$ e si denota $A \in NecS(M(P))$, se e solo se per ogni completamento di $M(P)$ esiste un albero di voto per cui A vince.*
- *A è un vincitore possibile di Condorcet per $M(P)$ e si denota $A \in PossC(M(P))$, se e solo se esiste un completamento di $M(P)$ tale che A è un vincitore per ogni albero di voto.*
- *A è un vincitore necessario di Condorcet per $M(P)$ e si denota $A \in NecC(M(P))$, se e solo se per ogni completamento di $M(P)$ e ogni albero di voto, A è un vincitore.*

Definizione 16. *Siano $M(P)$ un grafo di maggioranza incompleto, A un candidato e T un albero di voto.*

- *A è un vincitore possibile per $M(P)$ e T e si indica $A \in Poss(M(P), T)$, se e solo se esiste un completamento di $M(P)$ per cui A vince in T.*

- *A è un vincitore necessario per $M(P)$ e T e si indica $A \in Nec(M(P), T)$, se e solo se, per ogni completamento di $M(P)$, A vince in T.*

2.4 Relazioni note tra i vincitori

Vedremo ora quali sono le relazioni tra vincitori che sono state già individuate nel caso degli alberi di voto [2, 4, 5]. Elenco alcuni teoremi e proprietà ricavati in studi precedenti e che saranno sfruttati nella definizione di nuovi risultati [2] [4] [5].

Quando un profilo è completo, le nozioni di possibile e necessario coincidono per ogni nozione di vincitore.

Proposizione 1. *Dato un profilo completo P e un albero di voto semplice T, valgono le seguenti*

- $PossS(P) = NecS(P)$;
- $PossC(P) = NecC(P)$;
- $Poss(P, T) = Nec(P, T)$.

Un grafo di maggioranza può avere completamenti che non corrispondono a nessun completamento del profilo che lo induce. Perciò, per certe nozioni di vincitori, il vincitore possibile\necessario per il profilo incompleto non coincide con il vincitore possibile\necessario per il grafo di maggioranza incompleto.

Proposizione 2. *Dato un profilo incompleto P, il grafo di maggioranza incompleto $M(P)$ da esso indotto potrebbe avere completamenti che non possono essere prodotti da completamenti del profilo P perciò per certe nozioni di vincitori, il vincitore possibile\necessario per il profilo incompleto non coincide con il vincitore possibile\necessario per il grafo di maggioranza incompleto.*

Riflettendo sul fatto che il grafo di maggioranza può avere più completamenti del profilo corrispondente, si può dedurre che ogni nozione nella sua versione "possibile" relativa al profilo denota un sottoinsieme della stessa nozione relativa al grafo di maggioranza. Ad esempio, $Poss(P, T) \subseteq Poss(M(P), T)$. Viceversa, ogni nozione nella sua versione "necessaria" relativa al grafo di maggioranza denota un sottoinsieme della stessa nozione relativa al profilo. Per esempio, $Nec(M(P), T) \subseteq Nec(P, T)$.

Proposizione 3. *Siano dati un profilo incompleto P, il grafo di maggioranza corrispondente $M(P)$ e un albero di voto semplice T. Valgono le seguenti relazioni*

- $PossS(P) \subseteq PossS(M(P))$;
- $PossC(P) \subseteq PossC(M(P))$;

- $Poss(P,T) \subseteq Poss(M(P),T)$;
- $NecS(P) \supseteq NecS(M(P))$;
- $NecC(P) \supseteq NecC(M(P))$;
- $Nec(P,T) \supseteq Nec(M(P),T)$.

Teorema 1. *Sia P un profilo incompleto e A un candidato. Si può affermare che $A \in NecS(M(P))$ se e solo se esiste un cammino da A verso ogni altro candidato in $M(P)$.*

Teorema 2. *Sia P un profilo incompleto. Allora su alberi di voto semplici, valgono sempre le seguenti relazioni*

- $PossC(P) = PossC(M(P))$
- $NecC(P) = NecC(M(P))$.

Teorema 3. *Esiste un profilo incompleto P tale che $NecS(P) \neq NecS(M(P))$.*

Teorema 4. *Sia P un profilo incompleto su tre candidati. Allora $NecS(P) = NecS(M(P))$.*

Teorema 5. *Sia P un profilo incompleto. Allora $NecS(P) = NecS(M(P))$ se*

- *$M(P)$ è completo, oppure*
- *$M(P)$ è pienamente incompleto (in questo caso $NecS(P) = NecS(M(P)) = \emptyset$), oppure*
- *ci sono due candidati senza archi entranti in $M(P)$ (anche in questo caso $NecS(P) = NecS(M(P)) = \emptyset$).*

Teorema 6. *Sia P un profilo incompleto.*

- *Se c'è un unico candidato B senza archi entranti, allora, per ogni altro candidato A, $A \notin NecS(M(P))$ e $A \notin NecS(P)$.*
- *Per ogni candidato A tale che c'è almeno un candidato che A non raggiunge e tutti gli altri candidati che sono raggiungibili da A in $M(P)$ sono battuti da tutti gli altri candidati che non sono raggiungibili da A, $A \notin NecS(M(P))$ e $A \notin NecS(P)$.*
- *Se esiste una partizione dei candidati in due insiemi, detti S_1 e S_2, tali che ogni elemento in S_1 è peggiore di ogni elemento in S_2 in $M(P)$, allora per ogni $A \in S_1$, $A \notin NecS(M(P))$ e $A \notin NecS(P)$.*

Teorema 7. *Esistono un profilo incompleto P e un albero di voto semplice T tali che $Poss(P,T) \neq Poss(M(P),T)$.*

Teorema 8. *Esistono un profilo incompleto P e un albero di voto semplice T tali che $Nec(P, T) \neq Nec(M(P), T)$.*

Teorema 9. *Sia P un profilo incompleto su tre candidati e T un albero di voto semplice. Allora $Nec(P, T) = Nec(M(P), T)$.*

Teorema 10. *Sia P un profilo incompleto e T un albero di voto semplice. Allora $Nec(P, T) = Nec(M(P), T)$ se*

- *$M(P)$ è completo, oppure*
- *$M(P)$ è pienamente incompleto (in questo caso $Nec(P, T) = Nec(M(P), T) = \emptyset$).*

Teorema 11. *Sia P un profilo incompleto e T un albero di voto semplice. Per ogni candidato A tale che, per ogni candidato C che può competere con A in T, $A <_m C$ oppure la relazione tra A e C non è specificato in $M(P)$, $A \notin Nec(M(P), T)$ e $A \notin Nec(P, T)$.*

Si nota facilmente ragionando sulla definizione di albero di voto, che un albero di voto semplice è esso stesso un albero di voto, quindi tutte le disuguaglianze tra nozioni di vincitori ricavate per alberi di voto semplice continuano a valere per alberi di voto generali.

Proposizione 4. *Sia T_1 un albero di voto semplice e T_2 un albero di voto generico, se per qualche nozione di vincitore su T_1 è stata dimostrata la disuguaglianza tra vincitore computato a partire dal profilo e dal grafo di maggioranza, allora questa relazione di disuguaglianza continua a valere anche per gli analoghi vincitori computati su T_2.*

Teorema 12. *Sia P un profilo incompleto e T un albero di voto. Su alberi di voto generali valgono le seguenti relazioni*

- *$PossC(P) = PossC(M(P))$*
- *$NecC(P) = NecC(M(P))$*
- *$PossS(P) \neq PossS(M(P))$*
- *$NecS(P) \neq NecS(M(P))$*
- *$Poss(P, T) \neq Poss(M(P), T)$*
- *$Nec(P, T) \neq Nec(M(P), T)$*

Si riportano i risultati in modo sintetico nella seguente tabella.

	PossC	NecC	PossS	NecS	Poss	Nec
Alberi di voto semplici	$=$	$=$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$
Alberi di voto generali	$=$	$=$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$

Tabella 2.1: Relazioni tra i vincitori precedentemente determinate.

Capitolo 3

Incertezza sui votanti

Si vuole capire che relazioni esistono tra i vincitori computati a partire da un profilo incompleto e dal grafo di maggioranza ad esso associato in due particolari situazioni di incertezza: quando un certo numero di agenti oppure di candidati viene aggiunto a votazione conclusa.

Inizio considerando l'incertezza relativa all'introduzione di nuovi votanti.

A tal proposito si definisce formalmente un nuovo tipo di profilo incompleto.

Definizione 17 (Profilo V-incompleto)**.** *P è un profilo V-incompleto su un insieme di votanti $V = X \cup Y$ dove $X \cap Y = \emptyset$ e un insieme di candidati Ω se:*

- *P è profilo completo su X e Ω;*
- *P è profilo pienamente incompleto su Y e Ω.*

Esempio 4. Vediamo un esempio di profilo V-incompleto P e del relativo grafo di maggioranza $M(P)$. Il profilo è definito dalle seguenti preferenze

- $B > C > D > A$
- $A > B > C > D$
- $B > C > D > A$
- A, B, C, D
- A, B, C, D

dove gli ultimi due agenti non hanno espresso preferenze e quindi appartengono all'insieme Y. Il grafo di maggioranza $M(P)$ è riportato nella Figura 3.1. □

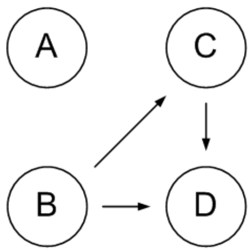

Figura 3.1: Grafo di maggioranza di un generico profilo V-incompleto.

3.1 Studio dei vincitori in alberi di voto semplici

Dalla definizione di profilo V-incompleto si deduce che X è l'insieme degli agenti che hanno espresso le loro preferenze, mentre Y è l'insieme degli agenti senza preferenza, ossia quelli che sono stati aggiunti dopo la votazione. Supponiamo che la cardinalità di X sia dispari e che quella di Y sia pari così da avere che $|X+Y|$ è dispari e non avere possibili pareggi nei voti indotti dai soli agenti in X e da quelli in $X \cup Y$. Questa semplificazione non è essenziale, si può anche avere una somma di voti pari, ma in questo caso bisogna specificare come si gestiscono i casi di pareggio, quindi è solo per semplicità che si considerano le cardinalità come sopra. Considerando i soli agenti in X, se nel grafo di maggioranza indotto dalle loro preferenze è presente l'arco $A \rightarrow B$ tra due candidati qualunque A e B, significa che una maggioranza m di agenti ha espresso la preferenza $A > B$. Indichiamo con m_{min} la più piccola tra le maggioranze associate ai vari archi del grafo. Si possono distinguere ora tre casi distinti a seconda del numero di agenti in X e in Y:

- Caso A: $|Y| < 2m_{min} - |X|$
- Caso B: $|Y| > |X|$
- Caso C: $2m_{min} - |X| < |Y| < |X|$

dove le uguaglianze non sussistono per le relazioni di parità e disparità tra le cardinalità di X e Y. Si studiano le relazioni tra i vincitori per ogni caso.

3.1.1 Grafo di maggioranza completo

Se vale la condizione $|Y| < 2m_{min} - |X|$ sul profilo V-incompleto P, dove m_{min} è definita come sopra, allora il grafo di maggioranza $M(P)$ dato dai votanti appartenenti a X non cambia dopo l'aggiunta dei votanti senza preferenza, in particolare $M(P)$ resta completo. Infatti affinchè esista un arco in un grafo di maggioranza bisogna che almeno una maggioranza di votanti abbia espresso la preferenza corrispondente all'arco creato. Supponendo che un arco $C_1 \rightarrow C_2$ sia presente in $M(P)$ perchè m votanti hanno espresso la preferenza $C_1 > C_2$

avremmo che la relazione inversa è stata espressa da $|X|-m$ votanti e dunque la quantità massima di votanti in Y per non invertire queste preferenze deve essere $|Y| < m - (|X| - m) = 2m - |X|$.

Si studiano ora le relazioni tra i vari tipi di vincitori computati a partire dal profilo V-incompleto P e dal grafo di maggioranza associato $M(P)$ nel caso in cui $M(P)$ sia completo. Preliminarmente si ricorda, come menzionato nella Proposizione 1, che lavorando con grafi di maggioranza completi le nozioni di possibile e necessario per ogni versione di vincitore coincidono.

Teorema 13. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa le condizioni del Caso A e $M(P)$ il grafo di maggioranza da esso indotto, allora valgono le seguenti relazioni*

- $PossC(P) = PossC(M(P))$
- $NecC(P) = NecC(M(P))$.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 2. □

Teorema 14. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso A e $M(P)$ il grafo di maggioranza indotto da questo, allora vale $PossS(P) = PossS(M(P))$ e $NecS(P) = NecS(M(P))$.*

Dimostrazione. La prima uguaglianza segue dalla Proposizione 1, mentre la seconda deriva direttamente dal Teorema 5, il quale afferma che se $M(P)$ è completo allora vale l'uguaglianza $NecS(P) = NecS(M(P))$. □

Teorema 15. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso A, $M(P)$ il grafo di maggioranza corripondente e T un albero di voto semplice, allora si può affermare che $Poss(P,T) = Poss(M(P),T)$ e $Nec(P,T) = Nec(M(P),T)$.*

Dimostrazione. La prima uguaglianza segue ancora dalla Proposizione 1. L'altro enunciato invece è conseguenza del Teorema 10 che afferma che se $M(P)$ è completo allora $Nec(P,T) = Nec(M(P),T)$. □

In particolare quindi si può lavorare sul grafo di maggioranza iniziale, i vincitori in questo caso non cambiano con l'aggiunta dei votanti appartenenti a Y.

3.1.2 Grafo di maggioranza pienamente incompleto

In questo caso il numero di agenti aggiunti a votazione avvenuta sono in numero strettamente maggiore rispetto agli agenti che hanno espresso le loro preferenze, il che implica che il grafo di maggioranza corrispondente a questa situazione di voto sarà pienamente incompleto (nessuna preferenza può assumere in modo certo la maggioranza e quindi non ci sono archi nel grafo di maggioranza).

Preliminarmente si può affermare che in un grafo di maggioranza pienamente incompleto ogni candidato è un vincitore possibile per ogni tipologia di vincitore.

Proposizione 5. *Se un grafo di maggioranza pienamente incompleto, tutti i candidati sono vincitori possibili in $M(P)$ per ogni nozione di vincitore.*

Si procede allo studio delle relazioni tra i vincitori computati dal profilo incompleto e dal grafo di maggioranza da esso indotto.

Teorema 16. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del caso B e $M(P)$ il grafo di maggioranza ad esso associato, si può allora affermare che*

- $PossC(P) = PossC(M(P)) = \Omega$
- $NecC(P) = NecC(M(P)) = \emptyset$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal Teorema 2 e dalla Proposizione 5. □

Teorema 17. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso B, $M(P)$ il grafo di maggioranza ad esso associato e T un albero di voto semplice. Allora valgono le seguenti:*

- $PossS(P) = PossS(M(P)) = \Omega$,
- $Poss(P,T) = Poss(M(P),T) = \Omega$.

Dimostrazione. $Poss(M(P),T) = \Omega$ e $PossS(M(P)) = \Omega$ sono conseguenze del fatto che il grafo di maggioranza $M(P)$ è pienamente incompleto (Proposizione 5). La stessa relazione può essere espressa anche ragionando direttamente sul profilo, infatti per ogni candidato A si può considerare il completamento di P in cui ogni votante mette A come preferito in assoluto. Quindi si può affermare che $Poss(P,T) = \Omega$ e $PossS(P) = \Omega$, da cui segue la tesi. □

Teorema 18. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso B e $M(P)$ il grafo di maggioranza ad esso associato, allora vale $NecS(P) = NecS(M(P)) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Essendo M(P) pienamente incompleto è possibile sfruttare il Teorema 5 da cui segue l'enunciato. □

Teorema 19. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso B, $M(P)$ il grafo di maggioranza ad esso associato e T un albero di voto semplice. Allora si può affermare che $Nec(P,T) = Nec(M(P),T) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Si sfrutta nuovamente il fatto che il grafo di maggioranza $M(P)$ è pienamente incompleto. Sotto questa ipotesi, infatti, è possibile applicare il Teorema 10 da cui segue l'enunciato. □

3.1.3 Grafo di maggioranza parzialmente incompleto

Se in un profilo V-incompleto P vale la relazione $2m_{min} - |X| < |Y| < |X|$ non si può dire niente a priori sul grafo di maggioranza ad esso associato, la sua caratterizzazione in termini di completezza dipende dal numero di votanti che hanno espresso le preferenze per ogni coppia di candidati. Noto che $A >_m B$ perchè m agenti hanno espresso la preferenza $A > B$ (deve essere $m > |\frac{X}{2}|$), se $m > |\frac{X+Y}{2}|$ allora i votanti aggiunti in un secondo momento non possono modificare questa preferenza, ma se $|\frac{X}{2}| < m \leq |\frac{X+Y}{2}|$ allora $A >_m B$ non è più certamente valido e il grafo di maggioranza non avrà più un arco che collega i candidati A e B.

Voglio dimostrare che, in questo particolare caso, per ogni completamento del grafo di maggioranza indotto dalla votazione degli agenti in $X \cup Y$ esiste un completamento del profilo che lo soddisfa. Se questo fosse un risultato sempre valido, potrei affermare che in queste condizioni determinare i vincitori dal grafo di maggioranza porta agli stessi risultati ottenuti lavorando sul profilo. Enuncio e dimostro quindi il teorema.

Teorema 20. *Sia P un profilo V-incompleto per cui vale la condizione del Caso C e $M(P)$ il grafo di maggioranza da esso indotto. Allora per ogni completamento del grafo di maggioranza $M(P)$ esiste un completamento del profilo P che lo soddisfa.*

Dimostrazione. Sia P_1 il profilo indotto dagli agenti in X, per ipotesi il grafo di maggioranza $M(P_1)$ è pienamente completo.

Si introducono successivamente i votanti appartenenti a Y che non esprimono nessuna preferenza. Per ipotesi questi $|Y|$ votanti sono in numero $2m_{min} - |X| < |Y| < |X|$ e $|X + Y|$ è dispari. Chiamo P questo nuovo profilo formato dagli agenti in $X \cup Y$.

I votanti aggiunti dopo possono apportare la modifica di alcuni degli archi del grafo di maggioranza iniziale $M(P_1)$. Infatti perchè tra due candidati A e B qualsiasi esista un arco $A \to B$ (rispettivamente $B \to A$) bisogna che ci sia una maggioranza di votanti che esprimono la preferenza $A > B$ (rispettivamente $B > A$), ma se prima dell'aggiunta degli agenti in Y la maggioranza era raggiunta con $\lceil|\frac{X}{2}|\rceil$ voti, ora la maggioranza si ha con $\lceil|\frac{X+Y}{2}|\rceil$ voti e $\lceil|\frac{X+Y}{2}|\rceil > \lceil|\frac{X}{2}|\rceil$. Quindi se un arco in $M(P_1)$ era stato indotto da una maggioranza $m \geq |\frac{X+Y}{2}|$ sarà mantenuto anche in $M(P)$ mentre se la maggioranza m era tale che $|\frac{X}{2}| \leq m < |\frac{X+Y}{2}|$ l'arco dovrà essere rimosso da $M(P)$ non essendoci più abbastanza voti per cui m sia una maggioranza certa anche per P.

Voglio dimostrare ora che per ogni arco mancante in $M(P)$ tra due candidati qualunque A e B, esiste un completamento del profilo che induce $A \to B$ e un completamento del profilo che ne induce uno $B \to A$. Questi completamenti, inoltre, dovranno essere in grado di indurre grafi di maggioranza transitivi.

In primo luogo dimostro che dati due candidati distinti A e B esiste un completamento di P che induce $A \to B$ e uno che induce $B \to A$. Suppongo di essere nel caso più sfavorevole, ossia nel caso in cui $|Y| = 2m_{min} - |X| + 1$ e una generica preferenza, poniamo $A > B$, sia stata espressa da m votanti. Come detto prima, l'arco tra A e B non esiste più in $M(P)$ in quanto ora gli agenti sono $|X| + |Y| = |X| + 2m - |X| + 1 = 2m + 1$ e la maggioranza minima si ha con $|\frac{X+Y}{2}| = \lceil m + \frac{1}{2} \rceil$ preferenze.

Ora si può dire che sistono due tipi di completamenti di $M(P)$:

1) completamenti in cui $A >_m B$,

2) completamenti in cui $B >_m A$.

e per ognuno di questi esiste un completamento di P che lo soddisfa.

Nel caso 1) abbiamo già m agenti che dicono che $A > B$, se a questi aggiungiamo i votanti $|Y| = 2m - |X| + 1$ otteniamo che $3m - |X| + 1$ agenti esprimono $A > B$ ed essendo $3m - |X| + 1 \geq \lceil m + \frac{1}{2} \rceil$ sempre vera perchè $3m - |X| + 1 \geq m + \frac{1}{2}$ che è $m \geq \frac{X}{2} - 1$, esiste un completamento di P del tipo richiesto e cioè quello in cui tutti gli agenti appartenenti a Y dicono $A > B$ e si può introdurre l'arco $A \rightarrow B$.

Nel caso 2) si ha che $|X| - m$ agenti hanno espresso la preferenza $B > A$, analogamente a quanto fatto prima supponiamo che se tutti gli agenti in Y esprimono $B > A$, allora $B >_m A$ e si può inserire l'arco $B \rightarrow A$ in $M(P)$. Questo è vero perchè il numero degli agenti che esprime la preferenza $B > A$ è $|X| - m + 2m - |X| + 1 \geq m + \frac{1}{2}$ che porta a $\lceil m + \frac{1}{2} \rceil \geq m$, sempre vera.

Quindi esistono effettivamente i due completamenti richiesti.

Si esamina ora il problema della transitività dei grafi. Infatti, come già evidenziato nelle rispettive definizioni, un profilo risulta essere una collezione di ordinamenti totali stretti che devono essere transitivi mentre il vincolo della transitività non deve essere necessariamente soddisfatto da un grafo di maggioranza, cioè possono essere presenti cicli. Supponiamo di voler indurre un grafo in cui tra k candidati sono presenti gli archi $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow ... \rightarrow C_k \rightarrow C_1$, questa è una chiara violazione della transitività. Esiste un completamento del profilo P che induce un tale grafo di maggioranza. Tale profilo è quello in cui gli agenti in Y esprimono preferenze del tipo

- P_1: $C_1 > C_2 > ... > C_{k-1} > C_k$ è la preferenza del primo agente
- P_2: $C_k > C_1 > C_2 > ... > C_{k-1}$ è la preferenza del secondo agente
- P_3: $C_{k-1} > C_k > C_1 > ... > C_{k-2}$ è la preferenza del terzo agente

e così via per tutti gli altri agenti. In questo modo ogni singola relazione rappresentata dall'arco in $M(P)$ è espressa da $|Y| - 1 = 2m - |X|$ votanti, che sono abbastanza per indurre effetivamente l'arco richiesto (si nota che gli agenti in Y sono almeno 2 per soddisfare alla condizione $|Y|$ pari). Si sottolinea il fatto che con questo tipo di completamento le maggioranze risultano distinte.

Si è perciò dimostrato il teorema. $\square$

Si può quindi concludere che lavorare sul grafo di maggioranza porta agli stessi risultati ottenuti a partire dal profilo.

3.1.4 Risultati

Riassumo i risultati ottenuti su una tabella dove si esamina quando, per i tre sottocasi di profili V-incompleti studiati, è possibile lavorare sul grafo di maggioranza piuttosto che sul profilo per determinare i vincitori di Condorcet, Schwartz e vincitori dato un albero di voto semplice. Il simbolo "=" indica che la computazione può essere fatta ragionando sul grafo di maggioranza in quanto i vincitori così ottenuti risultano gli stessi che si hanno ragionando sul profilo. Si riporta inoltre, tra parentesi quadre, il numero del teorema in cui si dimostra ogni relazione.

	PossC	NecC	PossS	NecS	Poss	Nec
$M(P)$ completo	= [13]	= [13]	= [14]	= [14]	= [15]	= [15]
$M(P)$ pien. incompleto	= [16]	= [16]	= [17]	= [18]	= [17]	= [19]
$M(P)$ parz. incompleto	= [20]	= [20]	= [20]	= [20]	= [20]	= [20]

Tabella 3.1: Risultati per incertezza sui votanti: alberi di voto semplici.

3.2 Studio dei vincitori in alberi di voto

Si affronta ora lo studio della determinazione dei vincitori nella situazione di incertezza definita precedentemente considerando alberi di voto non semplici. Come prima cosa, sfruttando la Proposizione 4, si può affermare che tutte le disuguaglianze dimostrate per gli alberi di voto semplici continuano a valere anche per gli alberi di voto considerati ora.

Per gli altri risultati si ripercorrono le dimostrazioni date nel caso di alberi di voto semplici e si controlla se possono essere usate anche nel caso di alberi di voto.

3.2.1 Grafo di maggioranza completo

Essendo in questo caso il grafo di maggioranza completo, dalla Proposizione 1 si evince che le nozioni di possibile e necessario per ogni versione di vincitore coincidono.

Teorema 21. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa le condizioni del Caso A e $M(P)$ il grafo di maggioranza da esso indotto, allora valgono le seguenti relazioni se si considerano alberi di voto*

- $PossC(P) = PossC(M(P))$

- $NecC(P) = NecC(M(P))$.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 12. □

Teorema 22. *Dato un profilo V-incompleto P per cui valgano le assunzioni del Caso A e il grafo di maggioranza M(P) da esso indotto, valgono le seguenti assunzioni*

- $PossS(P) = PossS(M(P))$,
- $NecS(P) = NecS(M(P))$.

Dimostrazione. Se $M(P)$ è completo, allora è il grafo di maggioranza per ogni completamento del profilo P. Per di più, se $A \notin NecS(M(P))$ allora non c'è un cammino da A verso qualsiasi altro candidato B in $M(P)$ e per ogni grafo di maggioranza $M(P_1)$ dove P_1 è un qualunque completamento di P come affermato nel Teorema 1. Quindi $A \notin NecS(P)$ e si può affermare che $NecS(P) \subseteq NecS(M(P))$. Ricordando ora dalla Proposizione 3 che $NecS(P) \supseteq NecS(M(P))$, segue l'enunciato. □

Teorema 23. *Siano P un profilo V-incompleto per cui valgano le assunzioni del Caso A, M(P) il grafo di maggioranza indotto da questo e T un albero di voto, allora valgono le seguenti:*

- $Poss(P,T) = Poss(M(P),T)$,
- $Nec(P,T) = Nec(M(P),T)$.

Dimostrazione. Essendo $M(P)$ completo, questo è il grafo di maggioranza per qualsiasi completamento del profilo P. Ciò implica che se il candidato $A \notin Nec(M(P),T)$ allora $A \notin Nec(P,T)$ perchè ragionare su $M(P)$ è equivalente a ragionare su P, ne segue che $Nec(P,T) \subseteq Nec(M(P),T))$. Dal momento che è noto dalla Proposizione 3 che $Nec(P,T) \supseteq Nec(M(P),T)$, segue l'enunciato. □

3.2.2 Grafo di maggioranza pienamente incompleto

Teorema 24. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa le condizioni del Caso B e M(P) il grafo di maggioranza da esso indotto, allora valgono le seguenti relazioni*

- $PossC(P) = PossC(M(P))$
- $NecC(P) = NecC(M(P))$.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 12. □

Teorema 25. *Siano P un profilo V-incompleto che soddisfa le condizioni del Caso B, M(P) il grafo di maggioranza ad esso associato e T un albero di voto. Valgono le seguenti*

- $PossS(P) = PossS(M(P)) = \Omega$,
- $Poss(P, T) = Poss(M(P), T) = \Omega$.

Dimostrazione. Si procede in modo analogo al caso di alberi di voto semplici. □

Teorema 26. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso B e $M(P)$ il grafo di maggioranza ad esso associato, allora vale $NecS(P) = NecS(M(P)) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Per dimostrare $NecS(P) = NecS(M(P))$ nel caso di alberi di voto semplici si è sfruttato il Teorema 5. Nella dimostrazione del suddetto teorema si considerano due diversi completamenti di un profilo incompleto P.

- Nel primo si sceglie un candidato B_1 e si considera il completamento in cui $B_1 > C$ per ogni candidato $C \neq B_1$, quindi B_1 vince ogni scontro diretto contro ogni altro candidato. Ne segue che B_1 vince per ogni albero di voto.
- Nel secondo si sceglie un candidato $B_2 \neq B_1$ e si considera il completamento di P in cui $B_2 > C$ per ogni $C \neq B_2$. Analogamente a prima B_2 vince per ogni albero di voto.

Si è dimostrato che nel caso di grafi di maggioranza pienamente incompleti non c'è un unico candidato che vince per ogni completamento di P, perciò $NecS(P) = \emptyset$. Inoltre essendo il grafo di maggioranza pienamente incompleto $NecS(M(P)) = \emptyset$. Segue l'enunciato. □

Teorema 27. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso B, $M(P)$ il grafo di maggioranza ad esso associato e T un albero di voto, allora vale $Nec(P, T) = Nec(M(P), T) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Nel caso di un albero di voto semplice si è sfruttato il Teorema 10. Dimostro che questo è valido anche per alberi di voto. Se $M(P)$ è pienamente incompleto, allora tutti i candidati sono vincitori possibili per $M(P)$ e quindi $Nec(M(P), T) = \emptyset$. Si possono trovare poi, ragionando come nella dimostrazione precedente, due diversi candidati che siano vincitori per due diversi completamenti di P, perciò $Nec(P, T) = \emptyset$. Segue l'enunciato. □

3.2.3 Grafo di maggioranza parzialmente incompleto

Il Teorema 20 è stato enunciato e dimostrato senza considerare un particolare tipo di albero di voto (semplice o meno), quindi le sue considerazioni sono valide anche nel caso di alberi di voto. In particolare sotto queste condizioni si può affermare che per ogni completamento di un grafo di maggioranza $M(P)$ esiste un completamento del profilo P che lo soddisfa. Di conseguenza si può computare ogni nozione di vincitore a partire dal grafo di maggioranza $M(P)$.

Teorema 28. *Sia P un profilo V-incompleto che soddisfa la relazione del Caso C, $M(P)$ il grafo di maggioranza ad esso associato e T un albero di voto, allora valgono*

- $PossC(P) = PossC(M(P))$
- $NecC(P) = NecC(M(P))$
- $PossS(P) = PossS(M(P))$
- $NecS(P) = NecS(M(P))$
- $Poss(P, T) = Poss(M(P), T)$
- $Nec(P, T) = Nec(M(P), T)$.

Dimostrazione. Si prova sfruttando una dimostrazione analoga a quella fornita per il Teorema 20. □

3.2.4 Risultati

I risultati raggiunti sono riportati nella tabella sottostante. Anche in questo caso un simbolo "=" indica che la computazione può essere fatta ragionando sul grafo di maggioranza in quanto sussiste uguaglianza con i risultati ottenuti dal profilo. Tra parentesi quadre è indicato il numero del teorema in cui si dimostra ogni relazione.

	PossC	NecC	PossS	NecS	Poss	Nec
$M(P)$ completo	= [21]	= [21]	= [22]	= [22]	= [23]	= [23]
$M(P)$ pien. incompleto	= [24]	= [24]	= [25]	= [26]	= [25]	= [27]
$M(P)$ parz. incompleto	= [28]	= [28]	= [28]	= [28]	= [28]	= [28]

Tabella 3.2: Risultati per incertezza sui votanti: alberi di voto.

Capitolo 4

Incertezza sui candidati

Si vogliono ora studiare le relazioni esistenti tra i vincitori computati a partire da un profilo incompleto e dal grafo di maggioranza ad esso associato quando si ha a che fare profili in cui a votazione ultimata si ha l'aggiunta di nuovi candidati che quindi non si trovano in nessuna delle preferenze precedentemente espresse dai votanti. Come fatto nel caso di incertezza sui votanti, si definisce un nuovo tipo di profilo incompleto.

Definizione 18 (Profilo C-incompleto)**.** *P è un profilo C-incompleto sull'insieme dei votanti V e sull'insieme dei candidati Ω se valgono le seguenti condizioni:*

- *P è un profilo completo su V e $\Omega_1 \subseteq \Omega$;*
- *P è un profilo pienamente incompleto su V e $\Omega \setminus \Omega_1$.*

dove Ω_1 è un sottoinsieme non vuoto di Ω.

Riporto un esempio di profilo C-incompleto e del relativo grafo di maggioranza.

Esempio 6. Sia dato il profilo completo P su $\Omega = \{A, B, C, D\}$ definito dalle seguenti preferenze

- $B > C > D > A$
- $A > B > C > D$
- $B > C > D > A$.

Si consideri ora il profilo P_1 su $\Omega_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$ e definito dalle stesse preferenze del profilo P. P_1 risulta essere un profilo C-incompleto e il grafo di maggioranza ad esso associato $M(P_1)$ è riportato in Figura 4.1. □

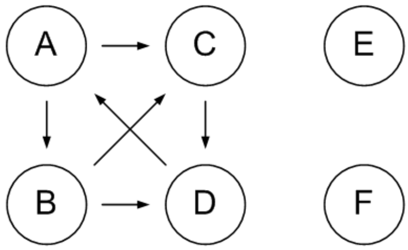

Figura 4.1: Grafo di maggioranza di un generico profilo C-incompleto.

4.1 Studio dei vincitori in alberi di voto semplici

Nel caso di profili C-incompleti, quello che succede al grafo di maggioranza completo indotto dalle votazioni antecedenti è l'aggiunta di nuovi nodi senza alcun arco a loro incidente. Per riassumere, quindi, si ha a che fare con un grafo di maggioranza completo a cui sono aggiunti nodi senza archi ad essi entranti o uscenti. Partendo da questa situazione si possono ricavare relazioni analoghe a quelle determinate nel caso di profili V-incompleti.

Teorema 29. *Sia P un profilo C-incompleto e $M(P)$ il grafo di maggioranza da esso indotto, allora valgono le seguenti relazioni*

- $PossC(P) = PossC(M(P))$
- $NecC(P) = NecC(M(P))$.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 2. □

Teorema 30. *Sia P un profilo C-incompleto e $M(P)$ il grafo di maggioranza corripondente, allora si può affermare che $PossS(P) \neq PossS(M(P))$.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3 segue che $PossS(P) \subseteq PossS(M(P))$, quindi per dimostrare che $PossS(P) \neq PossS(M(P))$ è sufficiente mostrare che esiste un candidato A tale che $A \notin PossS(P)$ e $A \in PossS(M(P))$. Si considera un profilo C-incompleto P con un solo agente e $\Omega = \{A, B, C\}$, dove solo la relazione tra A eB specificata ed è $A < B$. Il grafo di maggioranza indotto $M(P)$ ha un solo ramo da B ad A. Si considera ora l'albero di voto semplice T dove B gareggia contro C e il vincitore gareggia con A. Si può notare che $A \in PossS(M(P))$, infatti esiste un completamento di $M(P)$ dove A vince in T, ad esempio $A >_m C >_m B$. Si può però affermare anche che $A \notin PossS(P)$, infatti per nessun completamento di P è possibile trovare un albero di voto semplice in cui A vince, essendo questo sempre battuto da B. Abbiamo quindi dimostrato il teorema. □

Teorema 31. *Sia P un profilo C-incompleto e $M(P)$ il grafo di maggioranza corripondente, allora si può affermare che $NecS(P) = NecS(M(P)) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Il Teorema 1 afferma che $A \in NecS(M(P))$ se e solo se esiste un percorso da A verso ogni altro candidato in $M(P)$, ma dopo l'aggiunta dei nuovi candidati si hanno dei nodi che non presentano nè lati entranti nè uscenti, perciò si deduce che $NecS(M(P)) = \emptyset$.

Cosideriamo adesso due casi distinti:

- i candidati aggiunti sono in numero maggiore di uno;
- è stato aggiunto un solo candidato.

Nel primo caso si può affermare che ci sono almeno due candidati che non hanno lati entranti in $M(P)$, quindi sfruttando il Teorema 5 segue che $NecS(P) = NecS(M(P)) = \emptyset$.

Nel secondo caso si sfrutta il Teorema 6. Questo afferma che se c'è un unico candidato B senza lati entranti(l'unico candidato aggiunto), allora, per ogni altro candidato A, $A \notin NecS(P)$ e $A \notin NecS(M(P))$. Anche in questo caso si può affermare l'uguaglianza tra $NecS(P)$ e $NecS(M(P))$, infatti esiste un completamento di P tale che B perde per ogni albero di voto semplice e tale completamento è quello in cui B è scelto come meno preferito da ogni agente. Ne segue che $B \notin NecS(P)$. Abbiamo quindi dimostrato l'enunciato. □

Teorema 32. *Sia P un profilo C-incompleto e $M(P)$ il grafo di maggioranza corrispondente, allora si può affermare che $Poss(P, T) \neq Poss(M(P), T)$.*

Dimostrazione. Si può dedurre dal Teorema 7. □

Teorema 33. *Sia P un profilo C-incompleto e $M(P)$ il grafo di maggioranza corripondente, allora si può affermare che $Nec(P, T) = Nec(M(P), T)$. In particolare, in questo caso il vincitore necessario può essere determinato dal grafo di maggioranza sprovvisto di candidati senza preferenze.*

Dimostrazione. I candidati aggiunti non possono essere vincitori necessari.Questa è una conseguenza del Teorema 11, che afferma che dato un profilo incompleto P e un albero di voto semplice T, per ogni candidato A tale che per ogni candidato C che può gareggiare con A in T, la relazione tra A e C non è specificata in $M(P)$, allora $A \notin Nec(M(P), T)$ e $A \notin Nec(P, T)$. Quindi lo studio di $Nec(P, T)$ e $Nec(M(P), T)$ può essere condotto senza considerare i candidati aggiunti dopo, cioè studiando il grafo di maggioranza iniziale. Essendo questo completo per ipotesi, dal Teorema 10 segue l'enunciato. □

I risultati raggiunti sono riportati nella tabella sottostante. Anche in questo caso un simbolo "=" indica che la computazione può essere fatta ragionando sul grafo di maggioranza e un simbolo "≠" indica che bisogna computare i vincitori attraverso il profilo incompleto in quanto non sussiste uguaglianza con i risultati ottenuti dal grafo di maggioranza. Si indica inoltre il numero del teorema in cui si dimostra ogni relazione tra parentesi quadre.

	PossC	NecC	PossS	NecS	Poss	Nec
P C-incompleto	= [29]	= [29]	≠ [30]	= [31]	≠ [32]	= [33]

Tabella 4.1: Risultati per incertezza sui candidati: alberi di voto semplici.

4.2 Studio dei vincitori in alberi di voto

Si affronta ora lo studio dei vincitori per profili C-incompleti nel caso in cui si abbiano alberi di voto generali.

Teorema 34. *Sia P un profilo C-incompleto e $M(P)$ il grafo di maggioranza da esso indotto, allora valgono le seguenti relazioni*

- $PossC(P) = PossC(M(P))$
- $NecC(P) = NecC(M(P))$.

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 12. □

Teorema 35. *Sia P un profilo C-incompleto, $M(P)$ il suo grafo di maggioranza e T un albero di voto, valgono le seguenti relazioni*

- $PossS(P) \neq PossS(M(P))$
- $Poss(P, T) \neq Poss(M(P), T)$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 28 e dal Teorema 30 sfruttando la Proposizione 4, da cui si può affermare che tutte le disuguaglianze dimostrate per gli alberi di voto semplici continuano a valere per alberi di voto. □

Teorema 36. *Sia P un profilo C-incompleto e $M(P)$ il suo grafo di maggioranza, si può affermare che $NecS(P) = NecS(M(P)) = \emptyset$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga al caso degli alberi di voto semplici in quanto tutti i teoremi e i ragionamenti usati continuano a valere anche per alberi di voto. □

Teorema 37. *Sono dati un profilo C-incompleto P, il grafo ad esso associato $M(P)$ e un albero di voto T. Vale la relazione $Nec(P, T) = Nec(M(P), T)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca quella duale utilizzata nello studio di alberi di voto semplici. Infatti un albero di voto semplice è un caso particolare di albero di voto e dato che per il Teorema 11 se A è un candidato tale che $A?_m C$ per ogni candidato $C \neq A$ allora $A \notin Nec(M(P), T_1)$ e $A \notin Nec(P, T_1)$ dove T_1 è un albero di voto semplice, questo risultato vale anche per alberi di voto. Quindi lo studio di $Nec(M(P), T)$ e $Nec(P, T)$ può essere condotto senza considerare i candidati aggiunti in un secondo momento, ossia studiando il grafo di maggioranza iniziale. Essendo questo completo, dal Teorema 10 segue l'enunciato. □

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella seguente. Analogamente a quanto fatto nei casi precedentemente analizzati, un simbolo "=" indica che la computazione può essere fatta ragionando sul grafo di maggioranza, mentre un simbolo "≠" indica che bisogna computare i vincitori attraverso il profilo incompleto. Tra parentesi quadre il numero del teorema in cui si dimostra ogni relazione.

	PossC	NecC	PossS	NecS	Poss	Nec
P C-incompleto	= [34]	= [34]	≠ [35]	= [36]	≠ [35]	= [37]

Tabella 4.2: Risultati per incertezza sui candidati: alberi di voto.

Capitolo 5

Stato dell'arte

Si riportano gli studi da cui sono partita per ricavare i miei risultati.

Nell'articolo [4] si studia il problema di computare vincitori possibili e necessari a partire dal grafo di maggioranza nel caso in cui siano presenti votazioni con preferenze non completamente specificate oppure nel caso in cui sia l'albero di voto stesso ad essere incompleto.

Nell'articolo [5] si affronta uno studio simile a quello riportato nell'articolo [4], nel senso che si affronta sempre la determinazione di vincitori possibili e necessari in casi di incertezza su preferenze o su alberi di voto, ma a partire dai profili incompleti invece che dai grafi di maggioranza.

Inoltre, come già accennato, nell'articolo [2] si considerano tutte le nozioni di vincitori relativi a profili incerti analizzati in questo scritto e si studia quando gli insiemi di questi vincitori sono computabili a partire dal grafo di maggioranza senza tenere in considerazione il profilo che lo genera. In breve lo studio analizza se l'insieme di vincitori determinati a partire dal grafo di maggioranza coincide con i vincitori computati dal profilo incompleto che lo induce.

Capitolo 6

Conclusione e sviluppi futuri

Nello scritto si sono studiate le relazioni di uguaglianza che esistono tra le nozioni di vincitori possibili e necessari di Condorcet, vincitori possibili e necessari di Schwartz e vincitori possibili e necessari con albero di voto (semplice) fissato, in due particolari casi di incertezza: quando a votazione ultimata venivano aggiunti nuovi votanti, che quindi non avevano indicato nessuna preferenza riguardo l'insieme dei candidati, e quando a votazione conclusa venivano aggiunti nuovi candidati, che perciò non erano presenti in nessuna preferenza.

Nel caso di incertezza sui votanti si è ottentuto che, per ogni nozione di vincitore, si ha l'uguaglianza tra vincitori computati a partire dal profilo V-incompleto e a partire dal relativo grafo di maggioranza, utilizzando tanto alberi di voto semplici quanto generali. In particolare si è ricavato un risultato interessante relativo al caso di grafo di maggioranza parzialmente incompleto: si è dimostrato nel Teorema 20, infatti, che per ogni profilo V-incompleto che induca un grafo di maggioranza parzialmente incompleto, per ogni completamento del grafo di maggioranza è possibile ricavare un completamento del profilo che lo induce. Questo risultato è particolarmente interessante in quanto i problemi relativi alla computazione dei vincitori a partire dal grafo di maggioranza risiedono proprio nel fatto che questo può avere più completamenti rispetto al profilo che lo induce.

Nel caso di incertezza sui candidati si sono ottenuti risultati uguali nel caso di studio su alberi di voto semplici e su alberi di voto generali. In particolare sussiste una relazione di disuguaglianza per vincitori possibili di Schwartz e vincitori possibili dato un albero computati a partire da profili C-incompleti e dal relativo grafo di maggioranza, mentre si hanno relazioni di uguaglianza per tutte le altre tipologie di vincitori.

Un possibile sviluppo di questi studi potrebbe essere condotto su altri tipi particolari di profili, come ad esempio i profili single-peaked [6], quando l'incertezza è sui candidati e quando alcune delle preferenze tra coppie di candidati sono mancanti. Si consideri un insieme di candidati e un insieme di agenti, ognuno dei quali è dotato di una relazione di preferenza sopra questi candidati. Per ogni individuo è facile costruire un ordine lineare L di alternative tale che, in qualsiasi modo si prendano le alternative lungo l'ordinamento L, l'andamento di questa preferenza individuale sia sempre crescente, decrescente oppure prima crescente e poi decrescente. Un tale ordinamento è detto orientamento ammissibile per un agente. Un profilo di preferenze è detto single-peaked se esiste un ordinamento lineare ammissibile per ogni agente. Questo studio risulterebbe essere utile perchè i profili single-peaked sono un esempio di profili in cui la diversità dei voti è limitata, nel senso che esistono delle votazioni che nessun agente può esprimere [7], rendendo la votazione stessa più sicura contro manipolazioni esterne, corruzioni e presenza di votazioni disoneste.

Bibliografia

[1] J. Lang, M. S. Pini, F. Rossi, D. Salvagnin, K. B. Venable, and T. Walsh, "Winner determination in voting trees with incomplete preferences and weighted votes. in autonomous agents and multi-agent systems," *25(1): 130-157*, 2012.

[2] M. S. Pini, F. Rossi, K. B. Venable, and T. Walsh, "Possible and necessary winners in voting trees: majority graphs vs. profiles," *Proc. of 10th Int. Conf. on Autonomous Agents and Multiagents Systems (AAMAS 2011)*, pp. 311–318, 2011.

[3] J. Bartholdi, C. Tovey, and M. Trick, "How hard is it to control an election? mathematical and computer modeling," *16(8/9):27-40*, 1992.

[4] J. Lang, M. S. Pini, F. Rossi, K. B. Venable, and T. Walsh, "Winner determination in sequential majority voting," *Proceedings of IJCAI'07*, pp. 1372–1377, 2007.

[5] M. S. Pini, F. Rossi, K. B. Venable, and T. Walsh, "Dealing with incomplete agents' preferences and an uncertain agenda in group decision making via sequential majority voting," *Proceedings of KR'08*, pp. 571–578, 2008.

[6] M. A. Ballester and G. Haeringer, "A characterization of single-peaked domain. social choice and walfare.," *36(2):305-322*, 2011.

[7] G. Erdelyi, M. Lackner, and A. Pfandler, "Computational aspects of nearly single-peaked electorates," *CoRR abs/1211.2627*, 2012.

Elenco delle tabelle

2.1 Relazioni tra i vincitori precedentemente determinate. 13

3.1 Risultati per incertezza sui votanti: alberi di voto semplici. . . . 21
3.2 Risultati per incertezza sui votanti: alberi di voto. 24

4.1 Risultati per incertezza sui candidati: alberi di voto semplici. . . 28
4.2 Risultati per incertezza sui candidati: alberi di voto. 29

Elenco delle figure

2.1 Grafo di maggioranza del profilo P. 7
2.2 Albero di voto semplice T_1. 8
2.3 Albero di voto T_2. 9

3.1 Grafo di maggioranza di un generico profilo V-incompleto. 16

4.1 Grafo di maggioranza di un generico profilo C-incompleto. 26